OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Radu şi Alexandra au împreună 11 lei. Ei hotărăsc să cumpere împreună o carte, participând cu sume egale de bani. Radu este nevoit să împrumute de la Alexandra 1 leu, iar după cumpărarea cărţii Alexandra rămâne cu 5 lei.

$a)$ Aflaţi preţul cărţii;

$b)$ Câţi lei a avut Alexandra iniţial?

PROBLEMA 2. Arătaţi că dintre oricare 5 puteri ale lui 3, există cel puţin două, a căror diferenţă este divizibilă cu 5.

PROBLEMA 3. Mulţimea A de numere naturale are proprietăţile:

(i) $2 \in A$;

(ii) dacă $x \in A$, atunci $4x \in A$;

(iii) dacă $9x + 11 \in A$, atunci $x \in A$.

Arătaţi că $13 \in A$.

PROBLEMA 4. Pe o tablă sunt desenate 20 de cercuri albe, 21 de cercuri roşii şi 22 de cercuri verzi. Se şterg două cercuri de culori diferite şi se desenează în loc un cerc de a treia culoare. Această operaţie se repetă astfel încât pe tablă să rămână un singur cerc. Precizaţi culoarea cercului rămas pe tablă. Justificaţi răspunsul.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;

[2]Toate problemele sunt obligatorii;

[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. În triunghiul ABC se iau mijloacele M, N şi P ale laturilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$. Se consideră punctul $E \in (NP$ astfel încât $[NP] \equiv [PE]$ şi punctul $D \in (CM$ astfel încât $[CM] \equiv [MD]$. Să se arate că:

$a)$ $AE = NC$;

$b)$ $AD = 2 \cdot AE$.

PROBLEMA 2. Fie mulţimea $A = \left\{n \,\middle|\, n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c,\ \text{unde } a, b, c \in \mathbb{N}\right\}$.

$a)$ Arătaţi că $81 \in A$;

$b)$ Determinaţi elementele din mulţimea A care au exact 6 divizori.

PROBLEMA 3. Se consideră unghiul ascuţit $\widehat{XOY}$. În semiplanul determinat de OX şi în care nu se află semidreapta $[OY$, se duc semidreptele $[OA$ şi $[OB$, perpendiculare pe $[OX$ şi respectiv, pe $[OY$. Se notează cu $[OC$ bisectoarea unghiului $\widehat{BOX}$.

$a)$ Dacă măsura unghiului $\widehat{AOC}$ este cu $16°$ mai mare decât măsura unghiului $\widehat{XOY}$, determinaţi $m\left(\widehat{XOY}\right)$;

$b)$ Arătaţi că dacă $[OB$ este bisectoarea $\widehat{AOC}$, atunci $[OX$ este bisectoarea $\widehat{COY}$.

PROBLEMA 4. Spunem că un număr de forma $\overline{0,abcde}$ are proprietatea (P), dacă cifrele a, b, c, d, e aparţin mulţimii $\{4, 6\}$.

$a)$ Arătaţi că soluţia ecuaţiei $x + 0,46646 = 1,1111$ are proprietatea (P);

$b)$ Determinaţi câte numere diferite de forma $\overline{0,abcde}$ au proprietatea (P);

$c)$ Arătaţi că din oricare 17 numere diferite de forma $\overline{0,abcde}$ care au proprietatea (P), se pot alege două a căror sumă să fie $1,1111$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. Se consideră numerele raţionale distincte $a_1, a_2, ..., a_n$, astfel încât din oricare patru dintre ele există două care au produsul -1.

a) Daţi un exemplu de 6 astfel de numere;

b) Aflaţi valoarea maximă a lui n.

PROBLEMA 2. Să se arate că dacă numerele strict pozitive $a, b, c \in \mathbb{Q}$ verifică relaţia $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$, atunci:

a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} \in \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

PROBLEMA 3. Fie triunghiul ABC şi M mijlocul laturii $[BC]$. Daca N este mijlocul segmentului $[AM\ ]$ şi $BN \cap AC = \{P\}$, determinaţi raportul dintre aria patrulaterului $MCPN$ şi aria triunghiului ABC.

PROBLEMA 4. În triunghiul ABC, fie M mijlocul lui $[BC]$ şi P un punct pe BC, $P \neq M$. Paralela prin P la AC intersectează drepta AM în E, iar paralela prin P la AB intersectează dreapta AM în F. Să se demonstreze că punctele E şi F sunt simetrice faţă de M.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1. Să se arate că, dacă inversul sumei a trei numere reale nenule, este egal cu suma inverselor lor, atunci cel puţin două dintre numere au acelaşi modul (se presupune că suma celor trei numere este nenulă).

PROBLEMA 2. Dacă $x, y > 0$ sunt două numere reale care verifică relaţia

$$2\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{(x+1)(y+4)},$$

calculaţi media geometrică a numerelor x şi y.

PROBLEMA 3. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu $AB = 12$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$, M mijlocul segmentului $[BC]$ şi P mijlocul segmentului $[AB]$. Dacă cosinusul unghiului diedru format de planele (VBC) şi (ABC) este egal cu $\frac{3}{4}$, să se determine:

a) distanţa de la punctul P la planul (VBC);
b) distanţa de la punctul O la planul (VPM);
c) tangenta unghiului format de planele (VAC) şi (VBC).

PROBLEMA 4. Pe semidreptele $(OA$, $(OB$ şi $(OC$, perpendiculare două câte două, se consideră punctele A', B' şi C', astfel încât $A' \in (OA)$, $B' \in (OB)$ şi $C' \in (OC)$. Ştiind că patrulaterele $A'B'BA$ şi $B'C'CB$ sunt inscriptibile, să se arate că:

a) $A'C'CA$ este patrulater inscriptibil;
b) Dacă $OH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$, atunci H este ortocentrul triunghiului ABC;
c) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$, atunci $OG \perp (ABC)$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.